

Boyut Analizi

Soru 1 : Bir boru içerisindeki akımda borunun ıslak yüzeyinin birim alanına etki eden kayma gerilmesi,

$$\tau = f(V, D, k, \mu, \rho)$$

olduğuna, yani sırasıyla ortalama akım hızının, boru çapının, boru pürüzlülüğünün, akışkanın viskozitesinin ve özgül kütlesinin fonksiyonu olduğuna göre, τ kayma gerilmesinin ifadesini elde ediniz.

Çözüm :

$$\Phi(\tau, V, D, k, \mu, \rho) = 0$$

$m=6$ (Olaya etki eden parametre sayısı)

$n=3$ (Olaya etki eden parametrelerde gözlenen temel büyüklük sayısı)

$r=m-n=3$ (Elde edilebilecek boyutsuz denklem sayısı)

$$\pi_1 = V^{x_1} \rho^{y_1} D^{z_1} \tau$$

$$M^0 L^0 T^0 = ([L T^{-1}]^{x_1}) ([M L^{-3}]^{y_1}) ([L]^{z_1}) [M L^{-1} T^{-2}]$$

$$M^0: 0 = Y_1 + 1$$

$$L^0: 0 = X_1 - 3Y_1 + Z_1 - 1$$

$$T^0: 0 = -X_1 - 2$$

$$X_1 = -2; \quad Y_1 = -1; \quad Z_1 = 0$$

$$\pi_1 = V^{-2} \rho^{-1} D^0 \tau = \frac{\tau}{V^2 \rho}$$

$$\pi_2 = V^{x_2} \rho^{y_2} D^{z_2} k$$

$$M^0 L^0 T^0 = ([L T^{-1}]^{x_2}) ([M L^{-3}]^{y_2}) ([L]^{z_2}) [L]$$

$$M^0: 0 = Y_2$$

$$L^0: 0 = X_2 - 3Y_2 + Z_2 + 1$$

$$T^0: 0 = -X_2$$

$$X_2 = 0; \quad Y_2 = 0; \quad Z_2 = -1$$

$$\pi_2 = V^0 \rho^0 D^{-1} k = \frac{k}{D}$$

$$\pi_3 = V^{x_3} \rho^{y_3} D^{z_3} \mu$$

$$M^0 L^0 T^0 = ([L T^{-1}]^{x_3}) ([M L^{-3}]^{y_3}) ([L]^{z_3}) [M L^{-1} T^{-1}]$$

$$M^0: 0 = Y_3 + 1$$

$$L^0: 0 = X_3 - 3Y_3 + Z_3 - 1$$

$$T^0: 0 = -X_3 - 1$$

$$X_3 = -1; \quad Y_3 = -1; \quad Z_3 = -1$$

$$\pi_3 = V^{-1} \rho^{-1} D^{-1} \mu = \frac{\mu}{V \rho D}$$

$$\pi_3' = \frac{V \rho D}{\mu} = N_{Re}$$

$$\tau = \rho V^2 f\left(\frac{V \rho D}{\mu}; \frac{k}{D}\right)$$

Soru 2 : Bir pompanın gücü, N , bastığı debinin, Q , pompanın basma yüksekliğinin, H , ve pompanın bastığı akışkanın özgül ağırlığının, γ , fonksiyonu olduğuna göre, pompanın gücünü veren bağıntıyı boyut analizi ile elde ediniz.

Çözüm :

N : Pompanın gücü $[F L T^{-1}]$

Q : Pompa debisi $[L^3 T^{-1}]$

H : Pompanın basma yüksekliği $[L]$

γ : Akışkanın özgül ağırlığı $[F L^{-3}]$

Esas değişkenler : γ, Q, H

$m=4; \quad n=3$

Boyut Analizi

$r=m-n=1$ adet π sayısı elde edilebilir.

$$\pi = Q^x H^y \gamma^z N$$

$$F^0 L^0 T^0 = ([L^3 T^{-1}] X) ([L] Y) ([F L^{-3}] Z) [F L T^{-1}]$$

$$F^0: 0 = Z + 1$$

$$L^0: 0 = 3X + Y - 3Z + 1$$

$$T^0: 0 = -X - 1$$

$$X = -1; \quad Y = -1; \quad Z = -1$$

$$\pi = Q^{-1} H^{-1} \gamma^{-1} N$$

$$N = \pi \gamma Q H$$

Soru 3 : Bir akım ortamında d çaplı bir küresel engel vardır. Akımın bu küresel engele uyguladığı F hidrodinamik kuvveti akışkanın özgül kütleline, ρ , engel civarındaki ortalama akım hızına, V , ve kürenin, d , çapına bağlı olduğuna göre, F kuvvetinin ifadesini boyut analizi ile belirleyiniz.

Çözüm :

$$F : [F]$$

$$\rho : [F L^{-4} T^2]$$

$$V : [L T^{-1}]$$

$$d : [L]$$

Esas değişkenler : ρ, V, d

$$m=4; \quad n=3$$

$r=m-n=4-3=1$ adet π sayısı elde edilebilir.

$$\pi = \rho^x V^y d^z F$$

$$F^0 L^0 T^0 = ([F L^{-4} T^2] X) ([L T^{-1}] Y) ([L] Z) [F]$$

$$F^0: 0 = X + 1$$

$$L^0: 0 = -4X + Y + Z$$

$$T^0: 0 = 2X - Y$$

$$X = -1; \quad Y = -2; \quad Z = -2$$

$$\pi = \rho^{-1} V^{-2} d^{-2} F = \frac{F}{\rho V^2 d^2}$$

$$F = \pi \rho V^2 d^2$$

Soru 4 : Bir orifisten çıkan ideal akışkanın debisi, akışkanın özgül kütle, orifisin çapı ve basınç farkına bağlıdır. Buna göre, orifisten çıkan akışkanın debisini veren bağıntıyı Buckingham teoremi ile elde ediniz. Bulduğunuz bağıntıyı bildiğiniz şekli ile karşılaştırınız.

Çözüm :

$$m=4; \quad n=3$$

$r=m-n=4-3=1$ adet π sayısı elde edilebilir.

Temel değişkenler ρ, d, p seçilerek

$$\pi_1 = \rho^x d^y p^z Q$$

$$F^0 L^0 T^0 = ([F L^{-4} T^2] X) ([L] Y) ([F L^{-2}] Z) [L^3 T^{-1}]$$

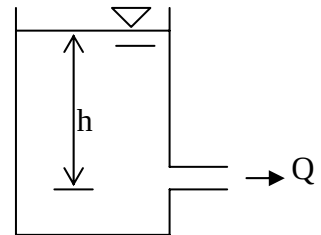
$$F^0: 0 = X + Z$$

$$L^0: 0 = -4X + Y - 2Z + 3$$

$$T^0: 0 = 2X - 1$$

$$X = 1/2; \quad Y = -2; \quad Z = -1/2$$

$$\pi_1 = \rho^{1/2} d^{-2} p^{-1/2} Q$$



Boyut Analizi

$$p = \gamma h$$

$$\gamma = \rho g$$

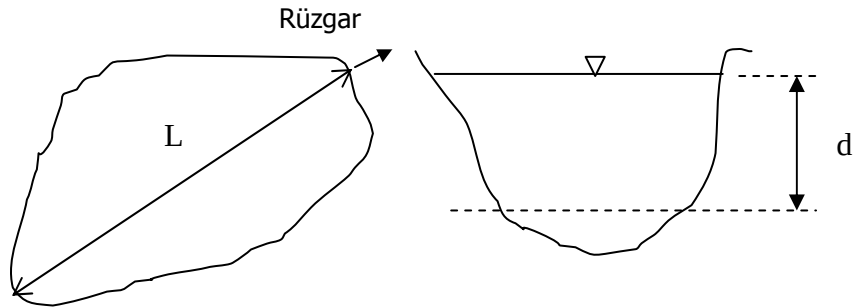
$$Q = \pi_1 \sqrt{\frac{\gamma h}{\rho}} d^2 = \pi_1 \sqrt{g h} d^2$$

Orifis denklemi (Bernoulli denkleminden) : $V = \sqrt{2 g h}$

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2 g h}$$

$$\pi_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Soru 5 : Ortalama derinliği d olan bir gölde rüzgarın esmesi su yüzeyinde H yüksekliğinde permanan dalgaların oluşmasına sebep olmaktadır. H 'nin göldeki ortalama su derinliği, d , gölün rüzgar doğrultusundaki uzunluğu, L , suyun özgül ağırlığı, γ , rüzgarın etkittiği kayma gerilmesi, τ , ile ilişkili olduğunu kabul ederek göldeki dalga yüksekliğini veren bağıntıyı elde ediniz.



Çözüm :

H : Dalga yüksekliği [L]

L : Gölün rüzgar esne yönündeki uzunluğu [L]

d : Ortalama göl derinliği [L]

γ : Suyun özgül ağırlığı [F L⁻³]

τ : Rüzgarın su yüzeyinde oluşturduğu kayma gerilmesi [F L⁻²]

$m=5$; $n=2$

$r=m-n=3$ adet π sayısı elde edilebilir.

Seçilen esas değişkenler : γ, d

$$\pi_1 = \gamma^{x_1} d^{y_1} H$$

$$F^0 L^0 T^0 = ([F L^{-3}] X_1) ([L] Y_1) [L]$$

$$F^0: 0 = X_1$$

$$L^0: 0 = -3X_1 + Y_1 + 1$$

$$X_1 = 0; Y_1 = -1$$

$$\pi_1 = \gamma d^{-1} H = H/d$$

$$\pi_2 = \gamma^{x_2} d^{y_2} L$$

$$F^0 L^0 T^0 = ([F L^{-3}] X_2) ([L] Y_2) [L]$$

$$F^0: 0 = X_2$$

$$L^0: 0 = -3X_2 + Y_2 + 1$$

$$X_2 = 0; Y_2 = -1$$

$$\pi_2 = \gamma d^{-1} L = L/d$$

$$\pi_3 = \gamma^{x_3} d^{y_3} \tau$$

$$F^0 L^0 T^0 = ([F L^{-3}] X_3) ([L] Y_3) [F L^{-2}]$$

$$F^0: 0 = X_3 + 1$$

$$L^0: 0 = -3X_3 + Y_3 - 2$$

Boyut Analizi

$$X_3 = -1; \quad Y_3 = -1$$

$$\pi_3 = \gamma d^{-1} \tau = \frac{\tau}{\gamma d}$$

$$\pi_1 = f(\pi_2; \pi_3)$$

$$\frac{H}{d} = f\left(\frac{L}{D}; \frac{\tau}{\gamma d}\right)$$

Soru 6 : Bir boru içerisindeki üniform–permanan laminar akım halinde, enerji çizgisi eğimi, J , akışkanın özgül ağırlığı, γ , ile akışkanın dinamik viskozitesine, μ , ortalama akım hızına, V , ve boru çapına, D , bağlı olduğuna göre, enerji çizgisi eğimini, J , veren bağıntıyı boyut analizi ile elde ediniz.

Çözüm :

$$J = f(\gamma, D, V, \mu)$$

$$n=m; \quad n=3$$

$$r=m-n=5-3=2 \text{ adet } \pi \text{ sayısı elde edilebilir.}$$

Esas değişkenler : γ, μ, D

$$\pi_1 = \gamma^{x_1} \mu^{y_1} d^{z_1} V$$

$$F^0 L^0 T^0 = ([F L^{-3}] X_1) ([F L^{-2} T] Y_1) ([L] Z_1) [L T^{-1}]$$

$$F^0: \quad 0 = X_1 + Y_1$$

$$L^0: \quad 0 = -3X_1 - 2Y_1 + Z_1 + 1$$

$$T^0: \quad 0 = Y_1 - 1$$

$$X_1 = -1; \quad Y_1 = 1; \quad Z_1 = -2$$

$$\pi_1 = \gamma^{-1} \mu d^{-2} V = \frac{\mu V}{\gamma D^2}$$

π_2 boyutsuz ifadesi için serbest değişken boyutsuz J parametresi kullanıldığında X_2, Y_2, Z_2 değerleri sıfır elde edilecektir.

Dolayısıyla, $\pi_2 = J$ olarak belirlenebilir.

Parametre		F L T boyut sistemi	M L T boyut sistemi	İlgili Bağıntı
J	Hidrolik eğim	[-]	[-]	$J = f \frac{1}{D} \frac{V^2}{2g}$
μ	Dinamik viskozite	[F L ⁻² T]	[M L ⁻¹ T ⁻¹]	$\tau = \mu \frac{du}{dy}$
γ	Özgül ağırlık	[F L ⁻³]	[M L ⁻² T ⁻²]	$\gamma = \rho g$
V	Ortalama hız	[L T ⁻¹]	[L T ⁻¹]	
D	Boru çapı	[L]	[L]	